Gaussova eliminační metoda (GEM)

GEM patří mezi velmi častý a efektivní nástroj, který se používá pro výpočet determinantu matice, výpočet inverzní matice, anebo výpočet soustavy rovnic.

Z hlediska výpočtu determinantu je vhodná situace taková, kdy budou pod hlavní diagonálou pouze „NULY“, a kdy můžeme determinant spočítat jako součin prvků na hlavní diagonále. Viz rovnice (1) níže.

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{matrix} \qquad (1)$$

Determinant D by se rovnal:

$$D = x_{11}.x_{22}.x_{33} \qquad (2)$$

Postup k dosažení takové situace je následující. Lze násobit kterýkoliv řádek jakýmkoliv číslem, ale jakmile řádek vynásobíme, tak se vynásobí i determinant tím číslem, kterým byl násoben řádek. Principem tudíž je, že násobíme, sčítáme a odečítáme řádky matice a to tak, abychom pod diagonálu dostali nuly. To platí jak ve výpočtu inverzní matice, determinantu, tak i v soustavě lineárních rovnic.

Pro ilustraci lze uvést následující příklad. Jedná se o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých (viz (3), (4)). Naším cílem je, abychom dostali nulu pod hlavní diagonálu. V našem příkladu je pouze jeden prvek pod hlavní diagonálou a sice prvek v 2. řádku a 1. sloupci. Z toho vyplývá, že násobíme řádky tak, abychom je pak mohli od sebe odečíst. Tím docílíme stavu, kdy tam vznikne 0 a řešení té soustavy je již zřejmé.

Pokud bychom měli počítat determinant, tak si musíme pamatovat, jakými všemi čísly jsme násobení prováděli a následně to vydělit. Je zřejmé, že determinant této matice (5) je 3.3-2.2 = 5. Pokud se podíváme na tu poslední matici, která vyšla, tak determinant je z definice součin prvků na hlavní diagonále, tj. tj. 6.5 = 30. Nicméně, vzhledem k tomu, že jsme násobili první řádek 2 a druhý 3, tak to znamená, že to musím vynásobit mezi sebou, tj. 2.3 = 6. Z toho pak vyplývá, že právě číslem 6 musím determinant té matice, který nám vyšel, vydělit a tím získáme determinant původní matice, tj. 30/6 = 5.

$$3x + 2y = 20 \qquad (3)$$
$$2x + 3y = 20 \qquad (4)$$

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 20 \\ 2 & 3 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} /.(2) \\ /.(3) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 40 \\ 6 & 9 & 60 \end{array}\right) -$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 40 \\ 0 & 5 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow 6x + 4y = 40 \\ \rightarrow 5y = 20 \\ \underline{\underline{y = 4}} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 6x = 24 \\ \underline{\underline{x = 4}} \end{array} \qquad (5)$$

Dále je vhodné zmínit, že při řešení soustav rovnic se provádí zápis jednotlivých koeficientů do sloupců (viz rov. (5)). Zjistíme, jaký je koeficient u x na prvním řádku, tj. 3 u y je to 2. Na druhém řádku je u x 2 a u y 3. Nesmíme však zapomenout na výsledky, jinak bychom se k ničemu nedopočítali. Kromě toho, když násobíme řádek, tak musíme násobit i "pravou stranu" té rovnice, tj. ten výsledek čemu se 3x+2y rovná, anebo 2x+3y čemu se rovná.

V případě, že chceme určit inverzní matici k matici A, tak postupujeme tak, že si napíšeme matici A a vedle této matice napíšeme jednotkovou matici, která je typická tím, že má na hlavní diagonále jedničky a všude jinde nuly. Princip dalšího postupu spočívá v tom, že se snažíme udělat z té matice A matici jednotkovou. Jakmile jakkoli upravíme matici A, tak musíme tutéž úpravu provést na té jednotkové matici vedle (viz rov. (6)).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) /\cdot 3 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) - \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) /\cdot \frac{1}{3} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) /:(-2) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad (6)$$

$$A^{-1}$$

Uvedené aplikace umožňují jednoduše ověřovat tento postup, ale i graficky ilustrovat výše uvedené postupy, resp. výpočty. Kromě toho lze porovnat výsledky jednotlivých aplikací pro stejná zadání. Jedná se o aplikace:

- Gaussova eliminace vč. grafické ilustrace a uvádění postupu,
- Gauss kalkulátor včetně uvádění postupu,
- Inverzní matice včetně grafické ilustrace a uvádění postupu.